

# Об одном из обобщений формулы Ито-Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры и стохастическом первом интеграле

Е. В. Карачанская  
Тихоокеанский госуниверситет, Хабаровск

8 ноября 2011 г.

формула Ито-Вентцеля, нецентрированная пуассоновская мера, ядро  
интегрального инварианта, стохастический первый интеграл

## Аннотация

Строится обобщение формулы Ито-Вентцеля для системы обобщенных СДУ Ито с нецентрированной мерой на основе стохастического ядра интегрального преобразования. Построена система обобщенных СДУ, решение которой – ядро интегрального инварианта, связанного с решением обобщенного СДУ с нецентрированной мерой. Введено понятие стохастического первого интеграла системы обобщенных СДУ с нецентрированной мерой и определены условия, при выполнении которых случайная функция является первым интегралом заданной системы обобщенных СДУ.

## Введение

В [1, 2, 3] был предложен специфический подход к стохастическому интегрированию, основанный на том, что производится отображение не точки, а ее окрестности по некоторому традиционному, основанного на

исчислении Маллявена. Переход к стохастическим уравнениям для конкретных реализаций происходит на основе сопоставления динамики элемента пространственной структуры, маркированной числом, с динамикой реализации траектории, для которой это число является начальным значением. Эта возможность обусловлена близостью, в вероятностном смысле, траекторий, стартовавших в области исходной окрестности на каждом из временных сечений.

В настоящее время является актуальным исследование открытых систем, которые характеризуются наличием в них случайных возмущений, как непрерывных, описываемых винеровскими процессами, так и скачкообразных, описываемых пуассоновскими процессами. При этом, в условиях случайных возмущений, некоторые характеристики системы должны сохраняться. Т. е. возникают задачи построения программных управлений в открытых системах. Для случая, когда возмущение вызвано только винеровскими процессами, имеется несколько видов алгоритмов построения программных управлений. Наличие пуассоновской составляющей в случайном возмущении до сих пор не позволяло строить программное управление такими системами. Построенное обобщение формулы Ито-Вентцеля эту проблему снимает [6].

## 1 Стохастический объем

Пусть  $\mathbf{x}(t)$  – динамический процесс, определенный на  $\mathbb{R}^n$ , являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= a_i(t; \mathbf{x}(t)) dt + \sum_{k=1}^m b_{i,k}(t; \mathbf{x}(t)) dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} g_i(t; \mathbf{x}(t); \gamma) \nu(dt; d\gamma), \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0)) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{w}(t)$  –  $m$ -мерный винеровский процесс,  $\nu(t; \Delta\gamma)$  – однородная по  $t$  нецентрированная мера Пуассона.

Относительно коэффициентов  $a(t; \mathbf{x})$ ,  $b(t; \mathbf{x})$  и  $g(t; \mathbf{x}; \gamma)$  будем предполагать, что они ограничены и непрерывны вместе со своими производными  $\frac{\partial a_i(t; \mathbf{x})}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial b_{i,k}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial g_i(t; \mathbf{x}; \gamma)}{\partial x_j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  по совокупности переменных  $(t; \mathbf{x}; \gamma)$ .

Этих условий достаточно для существования случайных величин

$$J_{i,j}(t) = \lim_{|\Delta|=\Delta_j \rightarrow 0} \frac{x_i(t; \mathbf{x}(0) + \Delta) - x_i(t; \mathbf{x}(0))}{\Delta_j},$$

которые могут быть найдены как решения системы (1) и системы стохастических уравнений [5, с. 287]

$$dJ_{i,j}(t) = J_{i,j}(t) \left[ \frac{\partial a_i(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_l(0)} dt + \beta \frac{\partial b_{i,k}(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_l(0)} dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \frac{\partial g_i(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_l(0)} \nu(dt; d\gamma) \right],$$

$$J_{i,j}(t) = J_{i,j}(t; \mathbf{x}(0)) \Big|_{t=0} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть  $J(t) = J(t; \mathbf{x}(0)) = \det(J_{ij}(t; \mathbf{x}(0)))$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Тогда случайную величину  $J(t)$  можно рассматривать как якобиан перехода от  $\mathbf{x}(0)$  к  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0))$ .

При помощи случайных величин  $J_{i,j}(t)$  можно построить всевозможные случайные многообразия  $\mathcal{M}(t; \mathbf{x}(t; \lambda))$  ( $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{x}(t; \lambda) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \leq n$ ), сопоставив их с конфигурационными многообразиями исходного заданного многообразия  $\mathcal{M}(0; \mathbf{x}(0; \lambda))$  ( $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{x}(0; \lambda) = \mathbf{x}(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ ,  $r \leq n$ ).

**Определение 1** [2] Элементом стохастического объема, порожденного случайным процессом  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0; \lambda))$ , назовем структуру  $d\Gamma(t) = J(t) d\Gamma(\mathbf{x}(0))$ , где  $J(t)$  – якобиан, построенный из элементов  $J_{ij}(t; \mathbf{x}(0))$ ,  $d\Gamma(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n dx_i$ .

На основе определения (1) в [2] вводится случайная структура

$$\mathcal{I}_{\Gamma(t)}(t) = \underbrace{\int \cdots \int_{\Gamma(t)} f(t; \mathbf{z}) d\Gamma(\mathbf{z})}_{\Gamma(t)} = \underbrace{\int \cdots \int_{\Gamma(0)} f(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) J(t) d\Gamma(\mathbf{y})}_{\Gamma(0)}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  – случайный процесс со случайным начальным условием  $\mathbf{y}$ . При этом интегрирование по случайному объему  $\Gamma(t)$  проводится на основе интегральных сумм Римана, понятия среднеквадратического предела для любых непрерывных по  $\mathbf{z}$ , в общем, случайных функций  $f(t; \mathbf{z})$ .

Структура (3) есть, в общем случае, случайная величина, на которую можно перенести утверждения, аналогичные имеющимся в классическом интегральном исчислении. Равенство-сопоставление (3) в указанном смысле – аналог замены переменных в теории интегрирования в математическом анализе, в котором якобиан преобразования  $J_{i,j}(t)$  – случайная величина, составленная из решений системы СДУ (2).

Определим, при каких условиях можно рассматривать вопрос об инвариантности (сохранении) стохастического объема.

## 2 Стохастическое ядро стохастического интегрального инварианта

Рассмотрим систему обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (1). Пусть  $\rho(t; \mathbf{x}; \omega)$  – случайная функция, измеримая относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{F}\}_0^T$ ,  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ ,  $t_1 < t_2$ , согласованного с процессами  $\mathbf{w}(t)$  и  $\nu(t; \Delta\gamma)$  (далее параметр  $\omega$  будем опускать) и относительно любой функции  $f(t; \mathbf{x})$  из класса локально ограниченных функций, имеющей ограниченные вторые производные по  $\mathbf{x}$  для нее выполнены соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) f(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 1, \quad (5)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \rho(0; \mathbf{x}) = 0, \quad d\Gamma(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n dx_i, \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  – решение уравнения (1).

Если  $f(t; \mathbf{x}) = 1$ , то из условия (4) и (5) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = 1, \quad (7)$$

т. е. для случайной функции  $\rho(t; \mathbf{x}) = \rho(t; \mathbf{x}; \omega)$  существует случайный функционал, сохраняющий постоянное значение:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 1, \quad (8)$$

который можно рассматривать как стохастический объем.

Тогда (4) с условиями (5) и (6) можно рассматривать как стохастический интегральный инвариант для функции  $f(t; \mathbf{x})$ .

**Определение 2** Неотрицательную функцию  $\rho(t; \mathbf{x})$  будем называть стохастическим ядром или стохастической плотностью стохастического интегрального инварианта, если выполняются равенства (4), (5) и (6).

**Замечание 1** Понятие интегрального инварианта для системы обыкновенных дифференциальных уравнений было известно ранее, например, оно рассматривалось В. И. Зубовым в [4, §8]. Однако существенное отличие, позволившее в [2, 3] рассматривать инвариантность случайного объема на основе ядра интегрального инварианта, состоит в том, что в (4) присутствует функциональный множитель. Таким образом, понятие ядра интегрального инварианта для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно рассматривать, как частный случай введенного в [2, 3], если взять  $f(t; \mathbf{x}) = 1$  и, исключив случайность, заданную винеровскими и пуассоновскими процессами, рассматривать интегрирование по детерминированному объему.

Определим соотношения, при которых функция  $\rho(t; \mathbf{x})$  для произвольной дважды дифференцируемой функции  $f(t; \mathbf{x})$  будет ядром интегрального инварианта.

Для случайной функции  $f(t; \mathbf{x}(t))$ , где  $\mathbf{x}(t)$  – решение уравнения (1),

запишем обобщенную формулу Ито [5, с. 271-272]:

$$\begin{aligned}
d_t f(t; \mathbf{x}(t)) = & \left[ \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t; \mathbf{x}(t)) \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik}(t; \mathbf{x}(t)) b_{jk}(t; \mathbf{x}(t)) \frac{\partial^2 f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_i \partial x_j} \Big] dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{ik}(t; \mathbf{x}(t)) \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} dw_k(t) + \\
& + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ f(t; \mathbf{x}(t) + g(t; \mathbf{x}(t); \gamma)) - f(t; \mathbf{x}(t)) \right] \nu(dt; d\gamma).
\end{aligned} \tag{9}$$

**Замечание 2** В дальнейшем, для упрощения записей, будем иметь в виду, что по индексам, встречающимся дважды, проводится суммирование (без использования знака суммы).

Продифференцируем по  $t$  обе части равенства (4), учитывая, что в левой части  $f(t; \mathbf{x})$  – детерминированная функция, а в правой  $f(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))$  – случайный процесс. Имеем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( f(t; \mathbf{x}) d_t \rho(t; \mathbf{x}) + \rho(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial t} dt \right) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) d_t f(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}).$$

Тогда, в силу (4) и (9), получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \left( f(t; \mathbf{x}) d_t \rho(t; \mathbf{x}) + \rho(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial t} dt \right) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) d_t f(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) d_t f(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \cdot \left[ \left[ \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial t} + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Big] dt + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ f(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) - f(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) f(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)). \quad (11)$$

Сделаем замену переменных:

$$\mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{y}, \quad (12)$$

тогда, учитывая переход от  $\mathbf{x}$  к  $\mathbf{y}$ , получаем:  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - g(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{y} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma); \gamma)$ . Следовательно, интеграл  $I$  примет вид:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) \rho(t; \mathbf{y} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma); \gamma)) \cdot f(t; \mathbf{y}) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma)), \quad (13)$$

где  $D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma))$  – якобиан перехода от  $\mathbf{x}$  к  $\mathbf{y}$ .

С учетом (13) и интегрирования по всему пространству  $\mathbb{R}^n$ , что дает возможность формальной замены обозначения переменной интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} [f(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) - f(t; \mathbf{x})] \nu(dt; d\gamma) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} f(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) \nu(dt; d\gamma) - \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} f(t; \mathbf{x}) \nu(dt; d\gamma) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left( \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot f(t; \mathbf{x}) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) \right) \nu(dt; d\gamma) - \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} f(t; \mathbf{x}) \nu(dt; d\gamma) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая (5), вычислим следующие интегралы, используя интегрирование по частям:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (15)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (16)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (17)$$

Для (15) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$

С учетом (6) вычислим внутренний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i = \\ &= \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} dx_i = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} dx_i. \end{aligned}$$



Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i = \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} dx_i = - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{18}$$

Аналогичным образом вычислим второй интеграл (16) и, применяя дважды интегрирование по частям, вычислим третий интеграл (17):

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned} \tag{20}$$

В (10) перенесем все в правую часть и с учетом (14), (18), (19) и (20) получим:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) f(t; \mathbf{x}) \cdot \left[ -d_t(\rho(t; \mathbf{x})) - \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial t} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial f(t; \mathbf{x}(t))}{\partial t} - \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \right. \\
&\quad \left. + \left( - \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}(t)))}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Чтобы равенство (21) имело место для любой локально ограниченной функции  $f(t; \mathbf{x})$ , имеющей ограниченные производные второго порядка,

интегральный инвариант  $\rho(t; \mathbf{x})$  должен являться решением стохастического уравнения

$$\begin{aligned} d_t \rho(t; \mathbf{x}) = & - \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \left( - \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \rho(t; \mathbf{x}) \Big|_{t=0} &= \rho(0; \mathbf{x}) \in C_0^2, \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \rho(0; \mathbf{x}) &= 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho(0; \mathbf{x})}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, получены условия инвариантности стохастического объема и доказана следующая

**Теорема 1** Пусть  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , решение системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= a_i(t; \mathbf{x}(t)) dt + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t; \mathbf{x}(t)) dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} g_i(t; \mathbf{x}(t); \gamma) \nu(dt; d\gamma), \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0)) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{w}(t)$  –  $m$ -мерный винеровский процесс,  $\nu(t; \Delta\gamma)$  – однородная по  $t$  нецентрированная мера Пуассона и  $\rho(t; \mathbf{x})$  – случайная функция, измеримая относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\left\{ \mathcal{F} \right\}_0^T$ ,  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ ,  $t_1 < t_2$ , согласованного с процессами  $\mathbf{w}(t)$  и  $\nu(t; \Delta\gamma)$  и относительно любой функции  $f(t; \mathbf{x})$  из класса  $\mathfrak{S}$  локально ограниченных функций, имеющих ограниченные вторые производные по  $\mathbf{x}$ . Функция  $\rho(t; \mathbf{x})$  является стохастическим ядром стохастического интегрального инварианта (4) для произвольной локально ограниченной функции  $f(t; \mathbf{x}) \in \mathfrak{S}$ , если она является решением системы (22) обобщенных СДУ Ито, удовлетворяющим начальным условиям (23).

### 3 Обобщение формулы Ито-Вентцеля

Равенство (4) с условиями (5), (6) и уравнение (22) для ядра интегрального инварианта соответствовали случаю детерминированной функции  $f(t; \mathbf{x})$ . Положим выполнение аналогичного равенства для случайной функции  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x})$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad (24)$$

где  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  – решение системы СДУ (1).

Рассмотрим сложный случайный процесс  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^{n_o}$ , где  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  – решение системы СДУ (1), а процесс  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x})$  – решение системы обобщенных СДУ Ито:

$$d_t \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) = \Pi(t; \mathbf{x}) dt + D_k(t; \mathbf{x}) dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt; d\gamma) G(t; \mathbf{x}; \gamma). \quad (25)$$

Относительно случайных функций  $\Pi(t; \mathbf{x})$ ,  $D_k(t; \mathbf{x})$ ,  $G(t; \mathbf{x}; \gamma)$ , определенных на пространстве  $\mathbb{R}^{n_o}$ , предполагаем, что они непрерывны и ограничены вместе со своими производными по всем переменным, измеримые относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ , согласованного с процессами  $\mathbf{w}(t)$  и  $\nu(t; \Delta\gamma)$  из (1).

Опираясь на уравнение для стохастического интегрального инварианта, построим правило дифференцирования для сложного случайного процесса  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))$ .

Рассмотрим интеграл  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})$ . Поскольку интегрирование проводится по пространству  $\mathbb{R}^n$ , на котором задан процесс  $\mathbf{x}(t)$ , используем равенство (24), записав его в виде (поменяв части равенства местами):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (26)$$

Продифференцируем обе части (26) по  $t$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) d_t \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \rho(t; \mathbf{x}) d_t \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) + \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) d_t \rho(t; \mathbf{x}) - D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dt \right) d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (27)$$

Учитывая, что интегрирование идет по пространству  $\mathbb{R}^n$  после введения замены переменной, то при интегрировании по кривой  $R(\gamma)$  в этом пространстве нужно учитывать произведенную замену (12).

Поскольку функция  $\rho(t; \mathbf{x})$  – ядро интегрального инварианта (24), применим теорему 1. Подставим (22) и (25) в правую часть (27):

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\mathbb{R}^n} \left( \rho(t; \mathbf{x}) d_t \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) + \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) d_t \rho(t; \mathbf{x}) - D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dt \right) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \left\{ \rho(t; \mathbf{x}) \left[ \Pi(t; \mathbf{x}) dt + D_k(t; \mathbf{x}) dw_k(t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) \nu(dt; d\gamma) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \left[ -\frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \left( -\frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \right] - \right. \\ & \quad \left. \left. - D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dt \right\}. \end{aligned}$$

Приведем подобные:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \left( \rho(t; \mathbf{x}) \Pi(t; \mathbf{x}) - \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} + \right. \\
& - D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \Big) dt + \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \left( \rho(t; \mathbf{x}) D_k(t; \mathbf{x}) - \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} \right) dw_k(t) + \\
& + \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \left[ \rho(t; \mathbf{x}) \cdot \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \nu(dt; d\gamma) + \right. \\
& \left. + \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \int_{R(\gamma)} \left[ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \right].
\end{aligned} \tag{28}$$

В силу (18), (19), (20) имеем:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} &= - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \\
\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) D_k(t; \mathbf{x}) \frac{\partial (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} &= - \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial D_k(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}, \\
\int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 (\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} &= \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл в сумме (28):

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \cdot \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)). \tag{29}$$

Введем замену переменных:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) &= \mathbf{y}, \\
\mathbf{x} &= \mathbf{y} + g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) = \mathbf{y} + g(t; \mathbf{y}; \gamma).
\end{aligned}$$

Обозначим якобиан перехода от вектора  $\mathbf{x}$  к вектору  $\mathbf{y}$  через  $D_o(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma))$ . Тогда, в силу (11) и дальнейшей формальной замены обозначения переменной интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) \mathbf{z}(t; \mathbf{y} + g(t; \mathbf{y}; \gamma)) \cdot \rho(t; \mathbf{y}) D_o(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{y}; \gamma)) D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) \mathbf{z}(t; \mathbf{y} + g(t; \mathbf{y}; \gamma)) \rho(t; \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \mathbf{z}(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) \rho(t; \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (30)$$

В результате, правая часть (27) примет вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{x}) \rho(t; \mathbf{x}) \left\{ \left( D_k(t; \mathbf{x}) + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \right) dw_k(t) + \right. \\ &+ \left( \Pi(t; \mathbf{x}) + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial D_k(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \\ &+ \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma) \nu(dt; d\gamma) + \\ &+ \left. \int_{R(\gamma)} \left[ \mathbf{z}(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \mathbf{z}(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

В (27) перенесем все в правую часть и с учетом (4) получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} d\Gamma(\mathbf{y}) \rho(0; \mathbf{y}) \left\{ -d_i \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + \left( D_k(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + b_{ik}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \right) dw_k(t) + \right. \\ &+ \left( \Pi(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial D_k(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) b_{jk}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \right. \\ &+ \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}) + g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma) \nu(dt; d\gamma) + \\ &+ \left. \left. \int_{R(\gamma)} \left[ \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}) + g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma)) - \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \right] \nu(dt; d\gamma) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, построенное правило дифференцирования сложного процесса будет иметь вид, который определяет следующая

**Теорема 2** [9] Пусть случайный процесс  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \in \mathbb{R}^{n_o}$ , где  $\mathbf{x}(t; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n$  – решение системы обобщенных СДУ (1), а процесс  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x})$  – решение системы обобщенных СДУ (25). Относительно коэффициентов-случайных функций, входящих в системы (1) и (25), определенных на пространствах  $\mathbb{R}^{n_o}$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно, предполагаем, что они непрерывны и ограничены вместе со своими производными по всем переменным, измеримые относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ , согласованного с процессами  $\mathbf{w}(t)$  и  $\nu(t; \Delta\gamma)$  из (1). Тогда сложный случайный процесс  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))$  является решением системы обобщенных СДУ

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) = & \left( D_k(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + b_{ik}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\partial x_i} \right) dw_k(t) + \\ & + \left( \Pi(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + a_i(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\partial x_i} + b_{ik}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial D_k(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) b_{jk}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \\ & + \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma) \nu(dt; d\gamma) + \\ & + \int_{R(\gamma)} \left[ \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) + g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma) - \mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \right] \nu(dt; d\gamma). \end{aligned} \quad (32)$$

По аналогии с известной терминологией, формулу (32) назовем обобщенной формулой Ито-Вентцеля для обобщенного уравнения Ито с нецентрированной мерой.

Кроме того, можно сформулировать еще одно

**Утверждение 1** Если  $\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))$  – решение системы (32), удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{z}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \Big|_{t=0} = \mathbf{z}(0; \mathbf{y}), \quad \mathbf{z}(0; \mathbf{y}) \in C_o^2,$$

тогда случайная функция  $\rho(t; \mathbf{x})$ , измеримая относительно потока  $\sigma$ -алгебр  $\left\{ \mathcal{F} \right\}_0^T$ ,  $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ ,  $t_1 < t_2$ , согласованного с процессами  $\mathbf{w}(t)$  и  $\nu(t; \Delta\gamma)$  является стохастическим ядром стохастического интегрального инварианта (24).

## 4 Стохастический первый интеграл

В [1] было введено понятие первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (без пуассоновской составляющей), в [3, с. 24] – понятие стохастического первого интеграла для системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито с центрированной пуассоновской мерой. Введем аналогичное понятие для случая наличия нецентрированной меры Пуассона.

**Определение 3** *Случайную функцию  $u(t; \mathbf{x}; \omega)$ , определенную на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1), будем называть стохастическим первым интегралом системы (1) обобщенных СДУ Ито с нецентрированной пуассоновской мерой, если с вероятностью, равной 1, выполняется условие*

$$u(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0)); \omega) = u(0; \mathbf{x}(0); \omega)$$

для любого решения  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0); \omega)$  системы (1).

Определим условия, при выполнении которых функция  $u(t; \mathbf{x}; \omega)$  будет стохастическим первым интегралом системы (1).

**Лемма 1** *Если функция  $\rho(t; \mathbf{x})$  – стохастическое ядро интегрального инварианта  $n$ -го порядка стохастического процесса  $\mathbf{x}(t)$ , выходящего из случайной точки  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$ , то для любого  $t$  она удовлетворяет равенству  $\rho(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))J(t; \mathbf{y}) = \rho(0; \mathbf{y})$ , где  $J(t; \mathbf{y}) = J(t; \mathbf{x}(0))$  – якобиан перехода от  $\mathbf{x}(t)$  к  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$ .*

*Proof.* Обратимся к равенству (7). Произведем замену переменных в интеграле и получим утверждение леммы, поскольку интегрирование происходит по одному и тому же случайному объему:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(0; \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) J(t; \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}).$$

В силу того, что случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$  определен в расширенном фазовом пространстве общей размерности, равной  $n+1$ , то для определения единственности траектории, система дифференциальных уравнений



для стохастических ядер должна состоять не менее, чем из  $n + 1$  уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t \rho_l(t; \mathbf{x}) = - \frac{\partial \rho_l(t; \mathbf{x}) b_{i k}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \left( - \frac{\partial (\rho_l(t; \mathbf{x}) a_i(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\rho_l(t; \mathbf{x}) b_{i k}(t; \mathbf{x}) b_{j k}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \\ + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \left[ \rho_l(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma)) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) - \rho_l(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma), \\ \rho_l(t; \mathbf{x}(t)) \Big|_{t=0} = \rho_l(0; \mathbf{x}(0)) = \rho_l(0; \mathbf{y}), \quad l = \overline{1, n+1}. \end{array} \right. \quad (33)$$

Как известно, совокупность ядер называется полной, если любая другая функция, являющаяся ядром интегрального инварианта  $n$ -го порядка, может быть представлена как функция от элементов этой совокупности.

**Теорема 3** Система стохастических уравнений (1) обладает полной совокупностью ядер, состоящей из  $(n+1)$ -й функций, каждая из которых является решением уравнения (22).

*Proof.* Пусть  $\rho_l(t; \mathbf{x})$ ,  $l = \overline{1, m}$ ,  $m \geq n+1$  — ядра интегрального инварианта (4). Из леммы 1 следует, что для любых  $l \neq n+1$  отношение  $\frac{\rho_l(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\rho_{n+1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}$  есть постоянная, зависящая только от  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  для любого решения  $\mathbf{x}(t)$  системы ДУ (1):  $\frac{\rho_l(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))}{\rho_{n+1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}))} = \frac{\rho_l(0; \mathbf{y})}{\rho_{n+1}(0; \mathbf{y})}$ . Построим функции  $\theta_l(t; \mathbf{x}) = \rho_l(t; \mathbf{x}) \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x})$ ,  $l = \overline{1, n}$ , при условии линейной независимости функций  $\rho_l(0; \mathbf{y})$ ,  $\rho_{n+1}(0; \mathbf{y})$ . В силу специфики подхода, описанного во введении, и полученной независимости функций  $\theta_l(t; \mathbf{x})$ , при  $t = 0$  можно было построить взаимно-однозначное соответствие:

$$x_i = q_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (34)$$

Для сокращения в записи введем обозначения:  $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ ,  $\vec{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{\rho}(t; \mathbf{x}) = \{\rho_1(t; \mathbf{x}), \rho_2(t; \mathbf{x}), \dots, \rho_n(t; \mathbf{x})\} \in \mathbb{R}^n$ . Так как в силу условия (34) для некоторого  $s \geq 1$  и любой другой функции  $\chi(t; \mathbf{x}) = \rho_{n+s}(t; \mathbf{x}) \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x})$  в момент времени  $t = 0$  возможно представление

$$\chi(0; \mathbf{y}) = \rho_{n+s}(0; \mathbf{y}) \rho_{n+1}^{-1}(0; \mathbf{y}) = \bar{\psi}(\vec{q}(\vec{\theta})),$$

то, следовательно, для любой функции  $\rho_{n+s}(t; \mathbf{x})$ , являющейся ядром интегрального инварианта системы (1) в силу утверждения леммы 1, получаем, с учетом построения функций  $\theta_l(t; \mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \chi(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) &= \rho_{n+s}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) = \\ &= \rho_{n+s}(0; \mathbf{y}) \rho_{n+1}^{-1}(0; \mathbf{y}) = \chi(0; \mathbf{y}) = \bar{\psi} \left( \vec{q} \left( \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \cdot \vec{\rho}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \right) \right). \end{aligned}$$

Из этого соотношения и следует, что для любого  $t \geq 0$  и всех  $s \geq 1$

$$\rho_{n+s}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) = \rho_{n+1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \bar{\psi} \left( \vec{q} \left( \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \cdot \vec{\rho}(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y})) \right) \right).$$

Т. е. полная совокупность ядер состоит из  $(n+1)$ -й линейно независимых функций.

**Следствие 1** Полная совокупность линейно независимых стохастических первых интегралов системы (1) состоит из  $n$  функций.

*Proof.* Функция  $\tilde{u}_l(t; \mathbf{x}) = \rho_l(t; \mathbf{x}) \rho_{n+1}^{-1}(t; \mathbf{x})$  обладает свойствами, описанными в определении 3 и является стохастическим первым интегралом системы ДУ (1). Таких функций получено ровно  $n$ .

**Замечание 3** Пусть случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$  является решением обобщенного уравнения Ито, которое представим в виде:

$$d_t \mathbf{x}(t) = a(t; \mathbf{x}(t)) dt + b(t; \mathbf{x}(t)) d\mathbf{w}(t) + dP(t, \Delta\gamma) = \tilde{d}_t \mathbf{x}(t) + dP(t, \Delta\gamma).$$

Тогда обобщенную формулу Ито (9) можно записать в виде:

$$d_t f(t; \mathbf{x}(t)) = \tilde{d}_t f(t; \mathbf{x}(t)) + \tilde{d}_t P(t, \Delta\gamma), \quad (35)$$

где  $\tilde{d}_t f(t; \mathbf{x}(t))$  – дифференциал Ито для части  $\tilde{d}_t \mathbf{x}(t)$ ,  $\tilde{d}_t P(t, \Delta\gamma)$  – дифференциал пуассоновской добавки  $dP(t, \Delta\gamma)$ .

Построим уравнение для  $u(t; \mathbf{x})$ , воспользовавшись следствием 1 и соотношением:

$$\ln u_s(t; \mathbf{x}) = \ln \rho_s(t; \mathbf{x}) - \ln \rho_l(t; \mathbf{x}). \quad (36)$$

Продифференцируем  $\ln \rho(t; \mathbf{x})$  с использованием (22) и обобщенной формулы Ито и (35).

$$\begin{aligned} d_t \ln \rho(t; \mathbf{x}) &= \frac{1}{\rho(t; \mathbf{x})} \tilde{d}_t \rho(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2\rho^2(t; \mathbf{x})} \left( -\frac{\partial(\rho(t; \mathbf{x}) b_{ik}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} \right)^2 dt + \\ &+ \int_{R(\gamma)} \left[ \ln \{ \rho_s(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma); \gamma) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) \} - \ln \rho_s(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma). \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим сумму первых двух слагаемых, для компактности записи опускаю аргумент у функций:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\rho} \tilde{d}_t \rho - \frac{1}{2\rho^2} \left( -\frac{\partial(\rho b_{ik})}{\partial x_i} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\rho} \left[ \left( -\frac{\partial(\rho a_i)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\rho b_{ik} b_{jk})}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \left( -\frac{\partial(\rho b_{ik})}{\partial x_i} \right) dw_k(t) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2\rho^2} \left( -\frac{\partial(\rho b_{ik})}{\partial x_i} \right)^2 dt = \\ &= \left[ -\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \frac{\partial b_{ik} b_{jk}}{\partial x_j} + b_{ik} b_{jk} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\rho^2} \left( \rho \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)^2 \right] dt - \left( b_{ik} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} \right) dw_k(t) = \\ &= S_2 dt - \left( b_{ik} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} \right) dw_k(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Преобразуем часть  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{ik} b_{jk}}{\partial x_j} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b_{ik} b_{jk})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} + b_{ik} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_j} + b_{jk} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_j} \right) = \\ &= -\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{ik} b_{jk}}{\partial x_j} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b_{ik} b_{jk})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_j} + 2 b_{ik} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_j} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + b_{ik} b_{jk} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_j} \right] = \\ &= -\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - a_i \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{ik} b_{jk}}{\partial x_j} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(b_{ik} b_{jk})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial x_i \partial x_j} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_j} - b_{ik} \frac{\partial b_{jk}}{\partial x_j} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно, подставляя (39) в (38), затем в (37), получаем следующее уравнения для  $\ln \rho(t; \mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
d_t \ln \rho(t; \mathbf{x}) = & \left[ -\frac{\partial a_i(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} - a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \ln \rho(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial b_{jk}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} + \right. \\
& + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 \ln \rho(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial (b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i} \frac{\partial \ln \rho(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}))}{\partial x_i \partial x_j} - b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \ln \rho(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \Big] dt + \\
& + \int_{R(\gamma)} \left[ \ln \{ \rho(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{y}); \gamma); \gamma) \cdot D(\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)) \} - \right. \\
& \left. - \ln \rho(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) - \left[ \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial \ln \rho(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right] dw_k(t).
\end{aligned} \tag{40}$$

Опираясь на полученное уравнение (40), составим уравнения для  $\rho_s(t; \mathbf{x})$  и  $\rho_l(t; \mathbf{x})$  и с учетом (36) приходим к выводу, что стохастический первый интеграл  $u(t; \mathbf{x}; \omega)$  обобщенного уравнения Ито является решением уравнения:

$$\begin{aligned}
d_t u(t; \mathbf{x}) = & \left[ -a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \right. \\
& - b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right) \Big] dt - b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) + \\
& + \int_{R(\gamma)} \left[ u(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)); \gamma) - u(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma).
\end{aligned} \tag{41}$$

В работе [1] было введено понятие первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито, как неслучайных функций на произвольных случайных реализациях возмущений:

$$u(0; \mathbf{x}(0)) = u(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0))).$$

Однако можно говорить и о стохастическом первом интеграле для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито. Следует отметить, что при отсутствии пуассоновских возмущений также можно говорить о *стохастическом* (а не только детерминированном) первом интеграле.

Для случая только винеровских возмущений (классическое уравнение Ито) в [1] исследование свойств первого интеграла как детерминированной функции было связано с установлением независимости такой функции от реализаций  $\mathbf{w}(t)$ . В рассматриваемом нами в рамках определения 3 случае функция  $u(t; \mathbf{x})$ , для которой построено уравнение (41), зависит также и от пуассоновских возмущений, т. е. является случайной.

При добавлении пуассоновских возмущений (обобщенное уравнение Ито) такое требование, как следует из уравнения (41), приводит к следующим условиям.

**Теорема 4** Случайная функция  $u(t; \mathbf{x}(t)) \in C_{t,x}^{1,2}$ , определенная на том же вероятностном пространстве, что и случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$ , являющийся решением системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито (1), есть первый интеграл системы (1) тогда и только тогда, когда функция  $u(t; \mathbf{x}(t))$  удовлетворяет условиям  $\mathcal{L}$ :

1.  $b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$ , для всех  $k = \overline{1, m}$  (компенсация винеровского возмущения);
2.  $\frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \left[ a_i(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2} b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0$  (независимость от времени);
3.  $u(t; \mathbf{x}) - u(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)) = 0$  для любых  $\gamma \in R(\gamma)$  во всей области определения процесса (компенсация пуассоновских скачков).

*Proof.* Рассмотрим уравнение (41), решением которого является функция  $u(t; \mathbf{x}(t))$ . Перенесем все в одну сторону от знака равенства. Учитывая, что  $d_t u(t; \mathbf{x}) = \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} dt$ , получаем для любого  $t$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \right. \\ & \left. + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right) \right] dt + b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} dw_k(t) - \\ & - \int_{R(\gamma)} \left[ u(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)); \gamma) + u(t; \mathbf{x}) \right] \nu(dt; d\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, множители при  $dt$ , при  $dw(t)$  и при  $\nu(dt; d\gamma)$  должны быть нулевыми. «Винеровское» слагаемое равно нулю:

$$b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{для всех } k = \overline{1, m}. \quad (42)$$

Для «пуассоновской» части получаем:

$$u\left(t; \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)); \gamma\right) - u(t; \mathbf{x}) = 0. \quad (43)$$

Преобразуем равенство (43). Перейдем к переменным

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - g(t; \mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma); \gamma).$$

Учитывая, что  $\mathbf{x}^{-1}(t; \mathbf{x}; \gamma)$  – обозначение обратной функции для  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)$  (см. (12)), убеждаемся, что это условие эквивалентно следующему:

$$u(t; \mathbf{x}) - u\left(t; \mathbf{x} + g(t; \mathbf{x}; \gamma)\right) = 0 \quad \text{для любых } \gamma \in R(\gamma). \quad (44)$$

Далее используем правило дифференцирование произведения и условие (42), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} - \\ & - b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = \\ & = \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} + \\ & + \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial b_{jk}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \right] = \\ & = \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + a_i(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{1}{2} b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial b_{jk}(t; \mathbf{x})}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \left[ a_i(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2} b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Таким образом, получили все условия  $\mathcal{L}$ .

**Замечание 4** В случае, когда рассматриваем конкретную реализацию, т. е. параметр  $\omega$  в дальнейшем не влияет, неслучайную функцию  $u(t; \mathbf{x})$  можно считать детерминированным первым интегралом стохастической системы.

**Замечание 5** В [3, с. 24] было введено понятие стохастического первого интеграла для центрированной пуассоновской меры и полученные условия для его существования учитывают необходимость задания плотности интенсивности пуассоновского распределения в отличие от предложенного в данной статье. Таким образом, безразлично, каков вероятностный закон имеют интенсивности пуассоновских скачков. Это обстоятельство является очень важным для дальнейших применений, в частности, для построения программных управлений [6].

**Замечание 6** В [7] была предложена формула, являющаяся обобщением формулы Ито-Вентцеля для СДУ Ито, содержащего только пуассоновскую составляющую с центрированной пуассоновской мерой.

Предложенное обобщение формулы Ито-Вентцеля и понятия стохастического первого интеграла [3] позволяет, как отмечено в [8], строить программные управления стохастических динамических систем, подверженных случайным возмущениям, вызванным винеровскими возмущениями и пуассоновскими скачками [6].

## Список литературы

- [1] Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений : препринт , // Киев : Изд-во АН УССР, Ин-т математики, 1978. – 22 с.
- [2] Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989. – 185 с.
- [3] Дубко В. А. Открытые эволюционирующие системы.// "Відкриті еволюційуючі системи" міжнар. наук.-практ. конф. (2002, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюційуючі системи" (26-27 квіт. 2002 р.) (Додаток). К., ВНЗ ВМУ-РоЛ, 2002. — С. 14-31.

- [4] Zubov V. I. Динамика управляемых систем: Учебное пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1982. – 285.
- [5] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1965. – 654 с.
- [6] Карачанская Е.В. Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями // Вестник Тихоокеанского госуниверситета, No 2 (21) 2011. – С.51–60.
- [7] Oksendal, B. and Zhang, T. The Ito-Ventcel formula and forward stochastic differential equation driven by Poisson random measures. // Osaka J. Math. 44 (2007), pp. 207–230
- [8] Чалых Е.В. Программное управление с вероятностью 1 для открытых систем. // Обозрение прикладной и промышленной математики т.14, вып. 2, 2007. – С. 253-254.
- [9] Карачанская Е.В. Об одном обобщении формулы Ито-Вентцеля. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011. (в печати) [www.tvp.ru/conferen/vsppm12/kazad208.pdf](http://www.tvp.ru/conferen/vsppm12/kazad208.pdf)